La bottiglia di plastica

principio di Pascal

Una bottiglia di plastica da un litro e mezzo è piena di acqua e chiusa con il suo tappo di diametro 28 mm. Una persona di 68 kg la mette di traverso sul pavimento, e ci sale sopra con i piedi, scaricando tutto il suo peso su una superficie di 200 cm^2.

Con quanta forza l'acqua spinge contro il tappo?

Analisi

L'acqua è un liquido, e come tale è incomprimibile. Però, la forza fatta dalla persona con i piedi crea una pressione che per il principio di Pascal si distribuisce uniformemente su tutte le superfici interne della bottiglia, quindi anche sul tappo.

Per arrivare alla forza sul tappo ci serviranno le superfici espresse nella stessa unità di misura; per coerenza le calcoleremo in metri quadrati.

Risoluzione

Il principio di Pascal, matematicamente, è un'uguaglianza tra pressioni, quella dei piedi e quella del tappo:

$$P_p = P_t \quad \rightarrow \quad \frac{F_p}{S_p} = \frac{F_t}{S_t}$$

In pratica si tratta di una proporzione, per cui per trovare la forza sul tappo dobbiamo fare:

$$F_t = \frac{F_p \cdot S_t}{S_p}$$

Adesso ricaviamoci tutto il necessario a trovare il risultato:

$$F_p = m \cdot 9{,}81 = 667{,}08\ \text{N}$$

$$S_p = 200\ \text{cm}^2 = 0{,}02\ \text{m}^2$$

$$S_t = r^2 \cdot \pi = 14^2 \cdot 3{,}14 = 616\ \text{mm}^2 = 0{,}000616\ \text{m}^2$$

A questo punto possiamo applicare il principio di Pascal:

$$F_p = \frac{667{,}08 \cdot 0{,}000616}{0{,}02} = 20{,}54\ \text{N}$$

Sul tappo la pressione dell'acqua esercita una forza di 20 newton e mezzo.

Lo sportello del sottomarino

legge di Stevin

Un sottomarino si immerge a 320 metri di profondità in mare (densità 1026 kg/m^3). Calcolare la forza che viene fatta su uno sportello circolare di diametro 46 centimetri.

Analisi

La pressione in un fluido aumenta con la profondità alla quale essa viene misurata, secondo la legge di Stevin. Sarebbe da considerare anche la pressione atmosferica che c'è a profondità zero; tuttavia, essa è annullata dalla stessa pressione che c'è all'interno del sottomarino per consentire la sopravvivenza all'equipaggio.

Risoluzione

Per rispondere alla richiesta sulla forza, abbiamo bisogno del concetto di pressione:

$$F = P \cdot S$$

La superficie può essere velocemente ricavata dal diametro dello sportello:

$$r = \frac{46}{2} = 23\ \text{cm} = 0{,}23\ \text{m} \qquad S = r^2 \cdot \pi = 0{,}23^2 \cdot 3{,}14 = 0{,}1661\ \text{m}^2$$

Per ottenere la pressione, invece, dobbiamo fare ricorso alla legge di Stevin:

$$P = D \cdot g \cdot h = 1026 \cdot 9{,}81 \cdot 320 = 3220819\ \text{Pa}$$

Adesso possiamo calcolare la forza:

$$F = P \cdot S = 3220819 \cdot 0{,}1661 = 534997\ \text{N}$$

Sullo sportello del sottomarino la pressione dell'acqua fa una forza di 535 mila newton, che sono il peso di circa 54 tonnellate. Decisamente una bella spinta, che richiede uno sportello con dei bei bulloni!

Il bagnino e i mattoni di cemento

principio di Archimede

Un bagnino sta portando dei mattoni di cemento in acqua ($D = 1032\ kg/m^3$), per appoggiarli sul fondale a pochi metri da riva per fare da ancoraggio ad una boa. Dopo poco tempo, si accorge che il trasporto è più facile se, appena gli è possibile, tiene il mattone completamente immerso.

Perché avviene questo? E quanta forza deve fare il bagnino per tenere sollevato il mattone immerso?

Si conoscono le misure del mattone (32 cm, 18 cm, 13 cm) e la sua massa (18 kg).

Analisi

Il mattone è più leggero da trasportare quando viene immerso grazie alla spinta di Archimede, che è pari al peso del fluido spostato. Sicuramente la spina di Archimede sarà minore del peso del mattone, infatti esso affonda; comunque agisce in senso opposto alla forza di gravità, aiutando il bagnino.

Risoluzione

La forza che bisogna fare per tenere sollevato il mattone mentre è immerso in mare può essere considerata una forza equilibrante, ed è la differenza tra la sua forza peso e la spinta di Archimede:

$$F_e = F_p - F_a$$

La forza peso è ricavabile direttamente dalla massa:

$$F_p = m \cdot g = 18 \cdot 9{,}81 = 176{,}6\ N$$

La spinta di Archimede, invece, va ricavata calcolando il peso dell'acqua di mare spostata. Il volume di acqua spostata è lo stesso del mattone, dato che esso è completamente immerso:

$$V_{acqua} = V_{mattone} = 32 \cdot 18 \cdot 13 = 7488\ cm^3 = 0{,}007488\ m^3$$

$$m_{acqua} = V_{acqua} \cdot D = 0{,}007488 \cdot 1032 = 7{,}73\ kg$$

$$F_a = m_{acqua} \cdot g = 7{,}73 \cdot 9{,}81 = 75{,}81\ N$$

Adesso che abbiamo le due forze che agiscono sul mattone, possiamo calcolare la forza equilibrante che deve essere fatta dal bagnino:

$$F_e = F_p - F_a = 176{,}6 - 75{,}81 = 100{,}8\ N$$

Il bagnino deve fare una forza di circa cento newton; il mattone, immerso nel mare, pesa come se avesse una massa di poco più di dieci chilogrammi.

La mongolfiera

principio di Archimede

Una mongolfiera è ferma a un centinaio di metri da terra. La sua forma può essere semplificata come una sfera di diametro 28 metri. Sapendo che la densità dell'aria esterna è 1,24 kg/m^3 e quella dell'aria contenuta nella mongolfiera è 1,14 kg/m^3, quant'è la massa totale della mongolfiera (pallone, cesto e carico)?

Analisi

La via per risolvere questo problema non è subito chiara. Ma possiamo cominciare a capire perché la mongolfiera riesca a volare: l'aria all'interno del pallone è riscaldata e la sua densità è minore di quella esterna, per cui è la spinta di Archimede a tenerla sollevata. Dato che la mongolfiera è ferma, la spinta verso l'alto è uguale alla forza di gravità. Dato che la spinta di Archimede sarà uguale al peso dell'aria spostata.

Bisogna fare attenzione al fatto che la spinta di Archimede deve equilibrare anche il peso dell'aria interna al pallone.

Risoluzione

Dobbiamo innanzitutto calcolare il volume del pallone, che abbiamo visto essere una sfera:

$$r = \frac{d}{2} = \frac{28}{2} = 14 \qquad V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 14^3 = 11488 \text{ m}^3$$

Con questo volume possiamo calcolare la massa di aria con la sua densità da fredda (quella spostata) e da calda (quella interna al pallone):

$$m_f = V \cdot D_f = 11488 \cdot 1{,}23 = 14131 \text{ kg} \qquad m_c = V \cdot D_c = 11488 \cdot 1{,}14 = 13097 \text{ kg}$$

Dato che la massa dell'aria spostata sarà uguale a quella della mongolfiera più quella dell'aria calda contenuta nel pallone, per avere la massa della mongolfiera basterà una differenza:

$$m_m = m_f - m_c = 14131 - 13097 = 1034 \text{ kg}$$

La mongolfiera, compreso il suo carico, ha una massa di 1034 chilogrammi. Per sollevarsi basta buttare giù qualche chilo di sabbia, oppure riscaldare ancora un po' l'aria nel pallone.

L'iceberg

principio di Archimede

Un grande blocco di ghiaccio ha una massa di 4300 tonnellate ed una densità di 850 kg/m^3. Esso si trova immerso nel mare (densità 1030 kg/m^3), libero di galleggiare.
Calcolare il volume della parte di iceberg che si trova sotto la superficie e di quella che affiora.

Analisi

Il ghiaccio galleggia sull'acqua per l'anomalia dell'acqua, che fa in modo che essa sia più densa allo stato liquido che a quello solido, nonostante la temperatura suggerisca il contrario. In più, l'iceberg è immerso in acqua di mare, più denso dell'acqua pura.
Utilizziamo il principio di Archimede come ragionamento, più che come formule. L'informazione più importante del problema è il fatto che l'iceberg galleggia, il che significa che sposta una quantità di acqua di mare che ha la sua stessa identica massa; naturalmente, visto che il mare è più denso del ghiaccio, il volume di acqua spostata sarà minore del volume dell'intero blocco di ghiaccio.
Il volume di acqua spostata corrisponde proprio alla parte immersa di iceberg.

Risoluzione

Possiamo cominciare con il calcolare il volume di acqua di mare che l'iceberg deve spostare per poter galleggiare, non prima però di aver ricavato la massa in chilogrammi:

$$m_{mare} = m_{iceberg} = 4300 \text{ tonnellate} = 4300 \cdot 1000 = 4300000 = 4,3 \cdot 10^6 \text{ kg}$$

$$V_{mare} = \frac{m_{mare}}{D_{mare}} = \frac{4,3 \cdot 10^6}{1030} = 4175 \text{ m}^3$$

Per risalire al volume di ghiaccio che si trova sopra la superficie, abbiamo bisogno del volume totale di ghiaccio. Per fortuna abbiamo la sua densità:

$$V_{iceberg} = \frac{m_{iceberg}}{D_{iceberg}} = \frac{4,3 \cdot 10^6}{850} = 5059 \text{ m}^3$$

A questo punto possiamo facilmente calcolare i volumi richiesti dal problema:

$$V_{sotto} = V_{mare} = 4175 \text{ m}^3$$

$$V_{sopra} = V_{iceberg} - V_{sotto} = 5059 - 4175 = 884 \text{ m}^3$$

Visti i risultati, si può osservare che la parte emersa dell'iceberg è meno di un quinto del totale. Come hanno scoperto sul Titanic.

Il reperto archeologico

principio di Archimede

Per sollevare dal fondale marino una preziosa anfora antica, alcuni archeologi hanno bisogno di una forza di 4800 newton. A questo scopo, legano al reperto un grosso sacco di gomma che riempiono d'aria con delle bombole. L'acqua del mare ha una densità di 1025 kg/m^3.
Quanti litri di aria sono necessari per ottenere la forza desiderata?

Analisi

Questo metodo di sollevamento è molto utilizzato, e sfrutta il principio di Archimede: il sacco pieno d'aria riceve una spinta verso l'alto pari al peso dell'acqua che riesce a spostare.
Bisogna quindi trovare il volume di acqua di mare che ha una forza peso pari a quella di cui gli archeologi hanno bisogno.
Dato che il volume di aria viene richiesto in litri, dobbiamo ricordare che un litro non è altro che un decimetro cubo.

Risoluzione

Il volume richiesto (tralasciando lo spessore del sacco di gomma) corrisponde al volume di acqua spostata:

$$V_{acqua} = \frac{m_{acqua}}{D_{acqua}}$$

Non abbiamo la massa di acqua, ma secondo la legge della forza di gravità essa può essere ricavata grazie alla forza peso, che per il principio di Archimede è proprio la spinta verso l'alto richiesta:

$$m_{acqua} = \frac{F}{g} = \frac{4800}{9,81} = 489,3\ \text{kg}$$

$$V_{acqua} = \frac{m_{acqua}}{D_{acqua}} = \frac{489,3}{1025} = 0,477\ \text{m}^3 = 477\ \text{dm}^3 = 477\ \text{l}$$

Bisogna mettere del sacco 477 litri di aria.
Teniamo presente che questi litri di aria non corrispondono ad una precisa quantità. I gas, infatti, sono comprimibili; per avere un volume di un litro occorre tanta massa in più di aria tanto più ci troviamo in profondità. Questo significa che, mentre il reperto viene sollevato, l'aria nel sacco si espanderà, e quella in eccesso va fatta fuoriuscire altrimenti la spinta aumenterà parecchio.